



# "מי דופק על חלוני?"

על מושג הסולם במוזיקה והשלכותיו הקוגניטיביות

איתן אגמון

תצלומים: אימג'בנק / GettyImages

042

גליליז  
אפריל  
2008

# ממחקרי אוניברסיטת בר-אילן

DO Do: oh, oh, oh,  
 TI Tu, a drink with jam and bread, that will bring us back to  
 LA la-bi-i re- am, fauc- te Jo-an-nes, La, a note to follow now,  
 SO Sol - ve - ve - pol - la - ti, low, a see-ble purling thread,  
 FA fa - ma - li - ta - o - rum, Fa, a long, long way to run,  
 MI Mi - tu - ge - so - rum, Me, a name, I call my-self,  
 RE re - so - na - re - fi - bris, Re, a drop of god-den sun,  
 DO Ut que - ant la - xis, Doe, a deer, a female deer,

## UT QUEANT LAXIS

**Hymn.**  
 Ut que-ant laxis resonare fibris Mi-ra gestō-  
 rum fāma-li tu-ō-rum, Sōl-ve pēllō-ti lā-bi-i re-ā-tum,  
 Sāncte Jo-ānes. 2. Nānti-us cēlso vēni-ens Olym-pō,  
 Te pātri māgnūm fō-re nācī-tō-rum, Nō-men, et vītāe  
 sē-ri-em ge-ēndāe Ordī-ne prōmī-ti. 3. Ille prōmī-si  
 dē-bi-us sup-ēri, Pērdi-dit prōmptae mōdu-los loquē-  
 lae: Sed re-formāsti gēni-tus per-ēmp-tae Organa vō-  
 cis. 4. Vēntris obst-rāso rēcubans cubi-li Sēnse-ras Rē-  
 gem thā-lamo manēntem: Hīnc pā-rens nā-ti mē-ri-tis  
 ut-erque Ab-di-ta pārdit. 5. Sit dē-us Pā-tri, genitā-  
 que P-ō-lī, Et tī-bi cōmpar utri-ū-sque vīrtus, Spī-ri-  
 tus semper; Dē-us dē-us, dōmīni Tēmpo-ri-s aēvo. Amen.

So that these your servants can, with all their voice, to sing your wonderful feats, clear the bluntness of our spotted lips, O Saint John!  
 An angel came from the heavens to announce your father the greatness of your birth, dictating your name and destination.  
 He (Zacarias) doubted of these divine promises and was deprived of the use of the speech; but when you were born it recovered the voice that had lost.  
 Still locked in your mother's breast, you felt the King's presence hidden in the vocal cords. And prophet, before being born, you revealed this mystery to your parents.  
 Glory be to the Father and to the engendered Son; glory similar to the Holy Spirit that is knit of both, for every century. Amen.

עוד במאה ה-11, הרבה לפני שמריה מ"צלילי המוזיקה" לימדה את ילדי הקפטן פון טראפ את צלילי הסולם המוזיקלי באמצעות השיר "דו הוא דב לבן, צפוני" ("Doe", "a deer, a female deer", הבחין הנזיר גוידו (Guido) מן העיר אָרְצוֹ (Arezzo) שבאיטליה שהמנן (המזמור הדתי) המוכר Ut queant laxis יכול להוות כלי דידקטי מעולה.

ההמנן מורכב משבע יחידות; היחידה השנייה פותחת בתו הנמצא מדרגה אחת בדיוק מעל התו הפותח את היחידה הראשונה, היחידה השלישית פותחת בתו הנמצא מדרגה אחת בדיוק מעל התו הפותח את היחידה השנייה, וכן הלאה, עד ליחידה השישית, הפותחת בתו הנמצא מדרגה אחת בדיוק מעל התו הפותח את היחידה החמישית (היחידה השביעית היא יוצאת דופן). בראשו של גוידו הבריק הרעיון: אפשר לקבע את הקשר בין התו הראשון של כל אחת משש היחידות הראשונות לבין ההברה בטקסט שאליה שייך התו, Ut, Re, Fa, Sol, La, ובכך להקל מאוד את לימוד התווים.

ב"צלילי המוזיקה" משתמשת מריה ב"פנט" דומה. אף שאין כל קשר בין מנגינת השיר במחזמר (שחיבר במיוחד המלחין ריצ'רד רוג'רס, באופן פשטני משהו, על בסיס של סולם עולה) לבין ההמנן המיוחס להיסטוריון הלומברדי בן המאה ה-8 פאולוס דיאקונוס, הרי שלבד מהחלפת ההברה Ut ב"דו" והוספת "סי" (בארצות דוברות אנגלית, "טי") מעל "לה", שמות התווים הם זהים בדיוק (דוגמה א').

עד כאן הכל יפה וברור ונחמד, לבד מנקודה מהותית אחת. היכן הוא, בדיוק, הסולם? המונח "סולם" מרמז על מבנה המורכב שלבים-שלבים, כאשר המרווח בין כל שני שלבים עוקבים הוא קבוע. אך מן המפורסמות הוא, ששלבי הסולם המוזיקלי דו, רה, מי, ..., דו, הם לעתים במרווח של "חצי-טון" זה מזה, ולעתים במרווח של טון שלם. ואכן, אם נתבונן במקלדת הפסנתר (דוגמה ב'), נראה שבין דו לרה, רה למי, פה לסול, סול ללה, ולה לסי, מפריד קליד נוסף, שחור, להבדיל ממיי-פה וסי-דו, העוקבים זה אחר זה בלא כל הפרדה. אם נמספר את 13 הקלידים העוקבים (לבן-שחור, שחור-לבן, או לבן-לבן) בין דו לדו במספרים 0 עד 12, ישויכו המספרים שלהלן,

דוגמה א'. למעלה: התווים של "דו הוא דב" ושל ההמנן הדתי Ut queant laxis - זה גם זה שימשו ללימוד תווים. למטה: ההמנן בכתב תווים עתיק

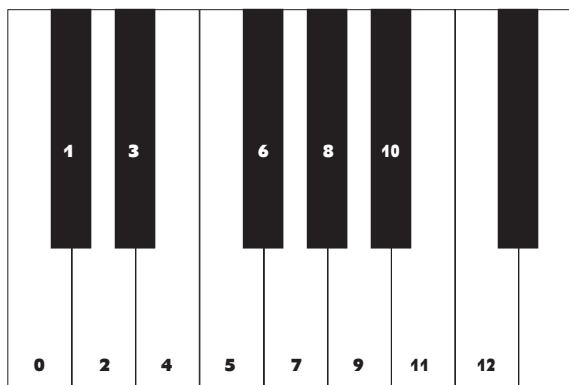
$$t = \left\lceil \frac{7}{12} \cdot s \right\rceil$$

דהיינו,  $t$  הוא המספר השלם הקרוב ביותר למכפלה של  $s$  בשבר  $\frac{7}{12}$ . הפונקציה  $G$  שולחת את איברי הקבוצה  $S = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 12\}$  בהתאמה, לאיברי הקבוצה  $T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . הבה נבדוק זאת באמצעות הטבלה שלפנינו:

$t =$	$s =$
$[0]=0$	0
$\left\lceil \frac{14}{12} \right\rceil = [1.166] = 1$	2
$\left\lceil \frac{28}{12} \right\rceil = [2.33] = 2$	4
$\left\lceil \frac{35}{12} \right\rceil = [2.9166] = 3$	5
$\left\lceil \frac{49}{12} \right\rceil = [4.0833] = 4$	7
$\left\lceil \frac{63}{12} \right\rceil = [5.25] = 5$	9
$\left\lceil \frac{77}{12} \right\rceil = [6.4166] = 6$	11
$[7]=7$	12

קיבלנו מעין ”גרסה מתמטית” לשיר ”דו הוא דב”: 0 הוא 0 (דו), 2 הוא 1 (רה), 4 הוא 2 (מי), וכן הלאה, עד שאנו ”חוזרים”, כדברי השיר, לדו, עם המספרים 12 ו-7: ”that will bring us back to Do!”. המרווח המוזיקלי שבין שני ה”דו-ים”, הדו של 0 ו-0 והדו של 12 ו-7, ידוע בתור ”אוקטבה”, מונח הנגזר מן המספר שמונה בלטינית (שכן סך מספרם של כל הקלידים הלבנים בין דו לדו הוא שמונה).

לא נוכל לעמוד כאן על ההשלכות המוזיקליות מרחיקות הלכת של הפונקציה  $G$ . למשל, אפשר לתת לפונקציה



דוגמה ב'. מקלדת הפסנתר

בהתאמה, לקלידים הלבנים דו, רה, מי, ..., דו: 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11 ו-12 (דוגמה ב'). קל לראות שהמרווח בין שני קלידים לבנים עוקבים הוא לעתים 1 (חצי טון) ולעתים 2 (טון שלם). אך האם ל”סולם” שכזה פיללנו?

אילו עסקנו בתופעה פיזיקלית גרידא, היינו בוודאי מסכימים: המונח ”סולם”, במקרה הטוב, הוא מטעה. אך ברור, כך נדמה, שמוזיקה היא פועל יוצא של הליכי עיבוד קוגניטיביים המתרחשים עמוק במוח/נפש האדם, לא פחות משהיא פועל יוצא של נתונים ”אובייקטיביים” כגון תדירויות של גלי קול באוויר. אם כך, הרי אין זה מן הנמנע שמוחנו מתרגם את הסולם ה”פגום” 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 12, לסולם תקני לחלוטין: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. אבל אם אכן כך, כיצד הוא עושה זאת?

התשובה טמונה, כפי הנראה, בפונקציה מתמטית פשוטה יחסית (שקיומה נתגלה רק לאחרונה על-ידי כותב שורות אלו), פונקציה ה”מתרגמת” את המספרים 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 12, לרצף 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. הבה נסמן את קבוצת המספרים 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 12 באות  $S$ , ואת קבוצת המספרים 0, 1, ..., 7 באות  $T$ . נגדיר פונקציה בשם ” $G$ ” מ- $S$  ל- $T$ , המקיימת את התנאי הזה עבור כל איבר  $s$  ב- $S$ : (הסוגריים המרובעים מסמנים את הערך המעוגל):

# ממחקרי אוניברסיטת בר-אילן



מעניין לציין שמרווח של 6 חצאי טונים אכן נתון לשני פירושים מוזיקליים, הידועים בשפה המקצועית כ"קוורטה מוגדלת" ו"קווינטה מוקטנת". (אפשר לראות ולשמוע את המרווחים המוזיקליים באתרים רבים באינטרנט, דוגמת [www.musicalintervalstutor.com](http://www.musicalintervalstutor.com)).

התיאוריה שלפיה הפונקציה G ממלאת תפקיד מרכזי בקוגניציה המוזיקלית עולה בקנה אחד עם תיאוריות מוכרות מתחום התפישה, ובייחוד תפישה המכונה "קטגורית" (categorical perception). מחקרים מתחום השפה המדוברת, למשל, הראו שצלילי השפה נתפשים כקטגוריות בדידות, אף שהמציאות הפונטית היא רציפה. למשל, בין צליל "ב" טיפוסי לצליל "פ" טיפוסי יש רצף של אפשרויות ביניים, המורכבות מן המאפיינים הפונטיים של שני העיצורים גם יחד. באופן דומה, רצף הצבעים נתפש כקטגוריות מסוג "צהוב", "אדום" וכדומה (להפתעת החוקרים אף התברר שקטגוריות הצבעים אינן תלויות-תרבות). אם נחשוב על שתי קטגוריות סמוכות כעל שני מספרים שלמים עוקבים, ועל רצף האפשרויות שבין שתי הקטגוריות כעל רצף המספרים הממשיים שבין השלמים, הרי שתפישה קטגורית שקולה לפעולת עיגול המספרים, פעולה שבה משתמשת הפונקציה G.

מרכיב חשוב נוסף של הפונקציה G הוא השבר  $\frac{7}{12}$ . כמו פעולת העיגול, גם מרכיב זה איננו סתמי, ויש לו אפילו יותר ממשמעות אחת. מצד אחד, המספרים 12 ו-7 מייצגים, כפי שראינו, את האוקטבה המוזיקלית, מרווח בעל משמעות מיוחדת ("that will bring us back to Do") – לשני תווים שונים שהמרווח ביניהם הוא אוקטבה אנו קוראים באותו השם!). מצד אחר,  $\frac{7}{12} = 0.58333$  הוא קירוב רציונלי מצוין ליחס האי-רציונלי  $\frac{\log 1.5}{\log 2} = 0.584962\dots$ . מה המשמעות של יחס זה? עוד במאה ה-6 לפנה"ס עמד הפילוסוף והמתמטיקאי היווני פיתגורס על משמעותם המוזיקלית המיוחדת של יחסי המספרים 1:2 ו-2:3. כיום אנו יודעים שגוף המפיק גלי קול רוטט בעת ובעונה אחת ב"תדירות יסודית" ובכפולות שלמות של תדירות זו, הלא הן ה"צלילים העיליים". לכן, 2:1 הוא היחס שבין תדירות הצליל העילי הראשון לתדירות



פירוש רחב יותר, שלפיו היא שולחת כל כפולה שלמה של חצאי-טונים (0 חצאי-טונים, חצי-טון, 2 חצאי-טונים וכולי), להוציא 6, אל סוג המרווח המתאים: 0 חצאי-טונים מהווים "פרימה"=0, חצי-טון או שני חצאי-טונים מהווים "סקונדה"=1, שלושה או ארבעה חצאי-טונים מהווים "טרצה"=2, וכן הלאה. 6 חצאי טונים אינם יכולים להיכלל בתחום הפונקציה משום שאפשר לעגל את המספר  $\frac{7}{12} \cdot 6 = 3.5$  באותה מידה כלפי מטה ל-3 וכלפי מעלה ל-4.



של התדירות. (כמו לוח לוגריתמים, מקלדת הפסנתר מתרגמת יחסים שווים להפרשים שווים; היחסים הם יחסי התדירויות של מיתרי הפסנתר, וההפרשים הם הפרשי מיקומם הסידורי של הקלידים, שלחיצתם מביאה לרטיטת המיתרים). משמעותו המיוחדת של היחס  $\frac{\log 1.5}{\log 2}$  (ולכן גם של היחס  $\frac{7}{12}$ ) נגזרת מכל התופעות שמנינו לעיל. הסולם המוזיקלי המתנגן לו בטבעיות, אם במחזור בן-

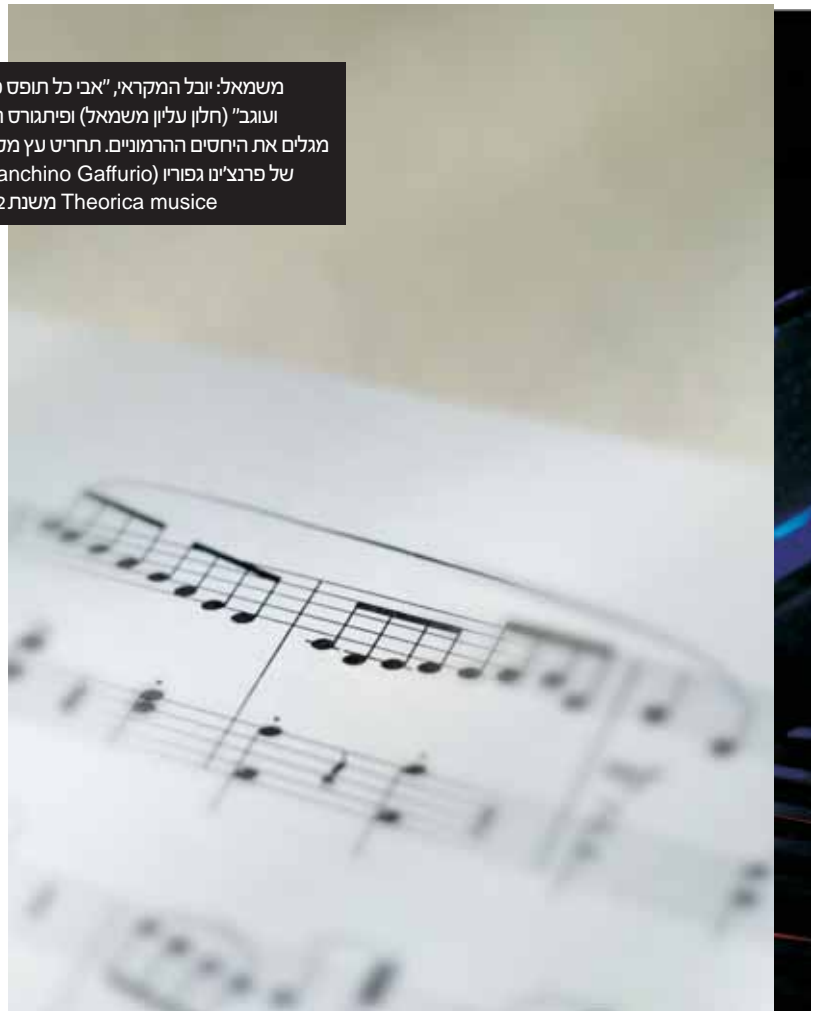
היסודית, ו-3:2 הוא היחס שבין תדירות הצליל העילי השני לראשון. יתרה מזו: אנו יודעים שמערכת השמיעה האנושית רגישה במיוחד ליחסי תדירויות אלו. לבסוף, אנו יודעים שהקשר בין המושג האקוסטי ”תדירות” (frequency) לבין המושג הפסיכולוגי ”גובה” (pitch), כלומר, תחושת הצליל שאנו חווים כתגובה לתדירות מסוימת שאנו קולטים, הוא קשר לוגריתמי: תחושת הגובה שקולה ללוגריתמוס



# ממחקרי אוניברסיטת בר-אילן



משמאל: יובל המקראי, "אבי כל תופס כינור ועוגב" (חלון עליון משמאל) ופיתגורס היווני מגלים את היחסים ההרמוניים. תחרט עץ מספרו של פרנצ'ינו גפוריו (Franchino Gaffurio) Theorica musicae משנת 1492



מול תועלת (קיומית) קובעים את מידת הדיוק. על השאלה "מי דופק על חלוני?" אפשר, אם כן, לענות במילות המקור האנגלי: "Me, a name I call myself". הסולם המוזיקלי הוא בבואה לא רק של העולם החיצוני, הפיזיקלי, אלא גם של הנפש פנימה. ■

**איתן אגמון** הוא פרופסור לתיאוריה של המוזיקה במחלקה למוזיקה, אוניברסיטת בר-אילן. בקורס בין-תחומי, "מוזיקה, מתמטיקה וקוגניציה", מרצה אגמון בהרחבה על היבטיה הקוגניטיביים של מערכת הצלילים המערבית.

## לקריאה נוספת

הסברים ודוגמאות של מושג המרווחים המוזיקליים:  
[www.musicalintervalstutor.com](http://www.musicalintervalstutor.com)

זמננו ואם בהמנון דתי מימי הביניים, הוא תופעה מרתקת המלמדת אותנו רבות על מבנה נפש האדם. נפש זו קשובה, מצד אחד, לעולם החיצוני, שכן בעולם נתון זה חייב האדם להתקיים. אך מצד אחר, בדומה ליחס שבין קבוצות המספרים T ו-S, הנפש איננה טורחת לבנות בבואה מדויקת של המציאות. "מרוב עצים", כדברי הפתגם, "לא רואים את היער". ולכן, יש להניח ששיקולים של עלות (קוגניטיבית)